

Einflussfaktoren auf die Effizienz der Energieübertragung bei gekoppelten LC-Schwingkreisen

Milan Ćuković

Matrikelnummer: 01531871

Bachelorarbeit: BSc Physik

Mentor: Christopher Albert

Technische Universität Graz

9. Februar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Abstract	3
2 Einleitung	3
2.1 Selbstinduktivität	3
2.1.1 Berechnung des Selbstinduktivitäten einer Zylinderspule	4
2.2 Gegenseitige Induktion	5
2.2.1 Ableitung der Neumann'schen Formel	5
2.2.2 Berechnung der Neumann'schen Formel im Fall der zwei benachbarten Spulen	6
2.3 Ableitung der $ I_2 $ vs ω LC-Kurve aus dem RLC Differentialgleichungssystem	8
2.4 Ableitung der $ I_2 $ vs ω L-Kurve	11
2.5 Ableitung der $ I_2 $ vs ω RLC-Kurve	11
3 Versuchsdurchführung	12
3.1 Aufbau der Spulen und die Simulation der Schaltungen im QuickField	12
4 Messergebnisse und Diskussion	15
4.1 Kopplungsgrad k in der Berechnung von gekoppelten L-Schwingkreise	15
4.2 Der Einfluss der Kapazitäten auf die Übertragung der Energie	22
4.3 LC gekoppelte Schwingkreise bei verschiedenen Abständen	30
5 Zusammenfassung	35
Literature	36

1 Abstract

Drahtlose Übertragung der elektrischen Energie ist noch immer ein Thema aktiver Untersuchungen, aber die bekannteste Methode eine Energie im Vakuum durch einen kurzen Abstand zu übertragen ist die Anwendung des Selbstinduktivitäts L von Spulen und ihrer gegenseitigen Induktion L_{12} . Die Effizienz der übertragenen Energie wird durch den Kopplungsgrad k beschrieben und k hängt von L und L_{12} ab. Umso größer Kopplungsgrad ist, desto mehr Energie des magnetischen Flusses wird in elektrische Energie übertragen. Selbstinduktivität und gegenseitige Induktion werden streng von der Form, der Windungszahl sowie gegenseitigem Abstand der Spulen beeinflusst. Mit einem größeren Abstand wird Kopplungsgrad kleiner, was die Neumannsche Formel zeigt. Die Analyse des Gleichungssystems der gekoppelten RLC Schwingkreise zeigt, dass der fließende Strom mit einer Frequenz manipuliert werden kann und dass es bei beiden unbelasteten und überlasteten LC Schwingkreise zwei Maxima mit ihren entsprechenden Resonanzfrequenzen gibt. Bei gekoppelten L- Schwingkreisen beobachtet man eine inverse polynomielle Kurve, wo die experimentellen Werte des Stroms in der Empfängerspule mit einem größeren Abstand kleiner werden. Auf der anderen Seite, bleiben experimentelle Maxima bei LC-Schwingkreise bei verschiedenen Abständen konstant. Obwohl der Kopplungsgrad sich nicht verändern muss, wird der fließende Strom bei einem verschiedenen Kapazität unterschiedlich groß.

In *QuickField* ist die Simulation magnetischer Felder und die gleichzeitige Modifikation der Spulengeometrie vergleichsweise einfach. Ich bedanke mich herzlich bei *Tera Analysis Ltd.* für eine Möglichkeit mir eine kostenlose temporäre nicht kommerzielle Lizenz für *QuickField Professional* zu liefern. Ich bedanke mich herzlich bei Sergey Chishko für einen Tutorium [3], in dem ein Aufbau Drahtloser Ladegeräte für Handys im QuickField demonstriert wurde. Die Geometrie der demonstrierten Spulen wurde als ein Beispiel für den Aufbau der Spulen für die Experimente in dieser Arbeit benutzt.

2 Einleitung

2.1 Selbstinduktivität

Wenn ein Strom I in einer Spule durchfließt, entsteht durch eine Windung der Spule ein magnetischer Fluss Φ der gleich dem Produkt von einem magnetischen Feld \mathbf{B} und einem Flächenvektor \mathbf{A} ist. Wenn der Strom sich durch alle Windungen zeitlich ändert, verändert sich die Größe des gesamten magnetischen Flusses. Der gesamte magnetische Fluss ist proportional dem Strom:

$$N\Phi = L \cdot I. \quad (1)$$

Proportionalitätsfaktor L ist die Selbstinduktivität. Angenommen dass L von der Zeit nicht abhängt, differenziert man die beiden Seiten durch t , und laut dem Faraday'schen

Induktionsgesetz [5]

$$U_{ind} = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (2)$$

erhält man die Induktionsspannung [5]

$$U_{ind} = -N \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3)$$

2.1.1 Berechnung des Selbstinduktivitäten einer Zylinderspule

Das Ziel dieses Abschnittes ist herauszufinden, von welchen Mengen die Selbstinduktivität abhängt. Stellt man die folgende Situation vor: Eine Spule hat N Windungen mit einer Länge l und der Schnittkreis der Spule hat einen Radius R . Ein Strom I fließt durch den Draht der Spule. Das entstehende Magnetfeld in der Spule lautet:

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I \quad (4)$$

Laut der Definition des Flusses

$$\Phi = B \cdot A, \quad (5)$$

ist der Fluss gleich

$$\Phi = \mu_0 \frac{N}{l} A I \quad (6)$$

Wenn eine zeitliche Änderung im Strom stattfindet, ändert sich der Fluss auch:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 \frac{N}{l} A \frac{dI}{dt}. \quad (7)$$

Laut dem Faraday'schen Induktionsgesetz 2 und der Definition des Selbstinduktivitäten 3 erhält man

$$U_{ind} = -L \frac{dI}{dt} = -\mu_0 \frac{N^2}{l} A \frac{dI}{dt}. \quad (8)$$

Extrahiert man aus dem 8 den Ausdruck für L, kriegt man

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}, \quad (9)$$

was die Quelle [5] auch bestätigt. Man sieht aus der Formel 9 dass die Selbstinduktivität von geometrischen Eigenschaften abhängt: die Zahl der Windungen die Schnittfläche sowie die Länge der Spule.

Man sieht in 9 die Permeabilitätskonstante μ_0 . In diesem Fall ist die relative Permeabilitätskonstante $\mu_r = 1$, was nur in solchen Fällen zählt, wenn sich Vakuum innerhalb der Spule befindet. Wenn ein ferromagnetischer Material in die Spule eingesetzt wäre, dann wäre $\mu_r \gg 1$, der Fluss wäre größer und somit wäre die Selbstinduktivität L größer.

2.2 Gegenseitige Induktion

2.2.1 Ableitung der Neumann'schen Formel

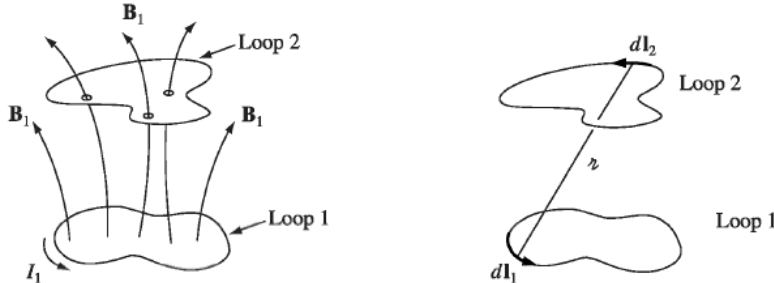


Abbildung 1: Zwei Schleifen mit einer Entfernung r [7]

Man beobachtet zwei Schleifen. 1 Die infinitesimalen Stücke dl_1 von der ersten und dl_2 von der zweiten Schleife sind durch einen Abstand r entfernt. Wenn der konstante Strom I_1 durch die Schleife 1 durchfließt, wird nach dem Biot-Savart Gesetz [7] [5]

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (10)$$

das Magnetfeld \mathbf{B}_1 erzeugt. Der Fluss Φ_2 , der durch die Schleife 2 geht ist der Integral des Magnetfeldes \mathbf{B}_1 [7] [5]

$$\Phi_2 = \int \mathbf{B}_1 d\mathbf{a}_2 \quad (11)$$

Angenommen dass $\mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{A}_1$, wobei \mathbf{A}_1 ein Vektorpotential ist, kann man den Fluss laut dem Satz von Stokes so ausdrücken [7] [5]

$$\Phi_2 = \int \mathbf{B}_1 d\mathbf{a}_2 = \int (\nabla \times \mathbf{A}_1) d\mathbf{a}_2 = \oint \mathbf{A}_1 dl_2. \quad (12)$$

\mathbf{A}_1 ist nichts anders als

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}_1}{r}. \quad (13)$$

Man setzt 13 in 12 und man erhält

$$\Phi_2 = L_{12} I_1, \quad (14)$$

und

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{r} \quad (15)$$

ist die Neumann'sche Formel die die gegenseitige Induktion L_{12} berechnet. Man kann aus der Formel einen wichtigen Punkt schließen. L_{12} hängt nur von geometrischen Eigenschaften ab: der Form der Spulen, der relativen Entfernung, sowie ihrer relativen

Orientierung (es ist nicht gleich wenn zwei Flächenvektoren auf der gleichen Gerade liegen oder sie parallel zueinander sind). Aus dieser Formel ist auch klar, dass es überhaupt egal ist, ob es zuerst über dI_1 oder über dI_2 integriert wird: $L_{12} = L_{21}$. [7] [5]

Analog zu 15, hängt die gegenseitige Induktion von der Permeabilität μ auch. Der Koppelungsgrad $k = \frac{L_{12}}{L}$ wird auf jeden Fall von μ nicht beeinflusst, weil μ von L_{12} und L sich abkürzen.

2.2.2 Berechnung der Neumann'schen Formel im Fall der zwei benachbarten Spulen

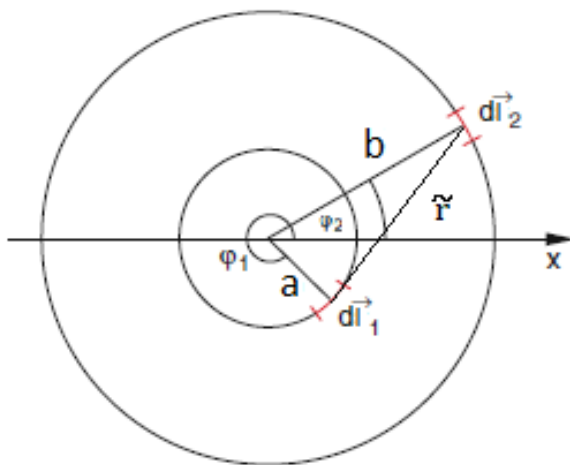


Abbildung 2: Die zwei auf der gleichen Ebene liegende Kreisringe mit den korrespondierten Radii a und b [5]

Nehmen wir als Beispiel zwei gegenseitig benachbarte Spulen an, die eine Form von Kreisringen haben. Eine Spule hat einen kleineren Radius a , die zweite Spule hat einen größeren Radius b . Die beiden Spulen sind voneinander durch die Höhe d entfernt. Die infinitesimale Stücke $d\mathbf{l}_1$ und $d\mathbf{l}_2$ aus 15 sind durch $ad\phi$ und $bd\phi$ ausgedrückt. Angenommen dass ein Skalarprodukt von orthogonalen $d\mathbf{l}_1$ und $d\mathbf{l}_2$ Null ist, muss man $ad\phi$ und $bd\phi$ mit $\cos(\phi_2 - \phi_1)$ multiplizieren. [8]

Jetzt stellt man die beiden Ringe auf der gleichen Ebene bzw. die Höhe d ist Null, wie in der Abbildung 2 dargestellt wird. Der kleinere Ring liegt innerhalb des größeren Rings. Man verbindet einen beliebigen Punkt auf dem größeren Ring mit einem beliebigen Punkt auf dem kleineren Ring. Der Abstand zwischen zwei Punkte ist \tilde{r} . Unter Verwendung der Kosinus-Regel, drückt man \tilde{r}^2 als $a^2 + b^2 - 2ab \cos(\phi_2 - \phi_1)$ aus. [8]

Jetzt entfernt man die beiden Ringe durch den Abstand d voneinander noch einmal und die Linie \tilde{r} zeigt in gleiche Richtung, bzw. bewegt sich mit einem kleineren Ring.

In diesem Fall stehen \tilde{r} und d orthogonal zueinander. Wenn man eine Linie r verbindet, kriegt man ein rechteckiges Dreieck, wo \tilde{r} und d Katheten und r eine Hypotenuse sind. [8]

Als ein Ergebnis, formt man den Doppelintegral 15 als

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} d\phi_2 \frac{ab \cos(\phi_2 - \phi_1)}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\phi_2 - \phi_1) + d^2}} \quad (16)$$

Dieser Doppel-Wegintegral hat keine analytische Lösung. Um eine approximierete Lösung zu kriegen, soll man ihn in einen Ausdruck umformen:

$$L_{12} = N_1 N_2 \frac{2\mu_0 \sqrt{ab}}{m} \left[\left(1 - \frac{m^2}{2}\right) \cdot K(m) - E(m) \right], \quad (17)$$

wo

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta}} \quad (18)$$

und

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (19)$$

die elliptischen Integrale der ersten und zweiten Art sind,

$$m = \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{(a+b)^2 + d^2}} \quad (20)$$

und N_1, N_2 die Windungszahl der Spulen. [9] [6] [8] Aus 17 und 20 sieht man, dass eine gegenseitige Induktion mit einem größeren Abstand d abfällt und mit größeren Radii a, b und größerer Windungszahl erhöht.

Es gibt keine analytische Lösung für 17, weil elliptische Integrale unmöglich zu lösen sind, trotzdem können sie als unendliche Potenzreihen ausgedrückt werden. [2] Je mehr Terme man in der Reihe berücksichtigt, desto präziser ist die Lösung:

$$K(m) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 m^{2n}, \quad (21)$$

$$E(m) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 \frac{m^{2n}}{1 - 2n}. \quad (22)$$

2.3 Ableitung der $|I_2|$ vs ω LC-Kurve aus dem RLC Differentialgleichungssystem

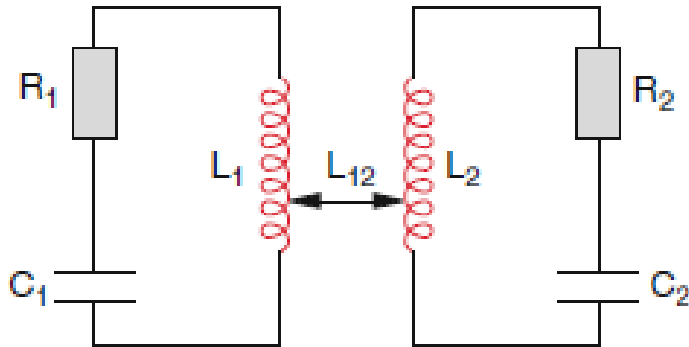


Abbildung 3: Zwei durch die gegenseitige Induktion L_{12} gekoppelten RLC Schwingkreise mit entsprechenden Widerständen R_1 , R_2 , Kondensatoren C_1 , C_2 und Spulen L_1 und L_2 . [5]

Man betrachtet zwei induktiv gekoppelte RLC Schwingkreise. Es gibt einen Widerstand R , eine Spule und einen Kondensator C in jedem Schwingkreis. Die Spulen sind durch einen Abstand entfernt und haben die entsprechenden Induktivitäten L_1 und L_2 . Laut dem Faraday'schen Induktionsgesetz induziert das veränderliche Magnetfeld die Induktionsspannung U_{ind} an der zweiten Spule L_2 und gleichzeitig erscheint die Spannung U_{ind} an der Spule L_1 . Als Ergebnis entsteht Wechselstrom in den beiden Spulen. Die Vektorfeldlinien der Felder von beiden Spulen addieren sich in das gemeinsame Magnetfeld und deswegen ist es schwer zu entscheiden, ob das gemeinsame Feld von der Spannung U_1 an dem ersten Kreis oder von der Spannung U_2 auf dem zweiten Kreis beeinflusst wird. Daher muss der Beitrag von Induktivitäten L_1 und L_2 gleichzeitig berücksichtigt werden. Für die Beschreibung des gemeinsamen Systems der Induktivitäten dient dazu die schon bekannte gegenseitige Induktion L_{12} und so werden die Kreisspannungen als $U_1 = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}$ und $U_2 = -L_{12} \frac{dI_1}{dt}$ an den Kreisen definiert. Für jedes Schwingkreis gibt es die entsprechende RLC Differentialgleichung, aber statt einer separaten DGL beobachtet man ein System der gekoppelten Differentialgleichungen. [5]

$$\begin{aligned} L_1 \frac{d^2 I_1}{dt^2} + R_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{I_1}{C_1} &= -L_{12} \frac{d^2 I_2}{dt^2}, \\ L_2 \frac{d^2 I_2}{dt^2} + R_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{I_2}{C_2} &= -L_{12} \frac{d^2 I_1}{dt^2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Unter Verwendung von einem Einsatz $I_k = I_{0,k}e^{i\omega t}$ ($k = 1, 2$) erhält das System der Gleichungen 23 die Form [5]

$$\begin{aligned} (-L_1\omega^2 + i\omega R_1 + \frac{1}{C_1})I_1 - \omega^2 L_{12}I_2 &= 0 \\ -\omega^2 L_{12}I_1 + (-L_2\omega^2 + i\omega R_2 + \frac{1}{C_2})I_2 &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Für die nicht trivialen Lösungen I_1 und I_2 aus 24 muss die entsprechende Koeffizientendeterminante [5]

$$[R_1 + i(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1})] \cdot [R_2 + i(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2})] + \omega^2 L_{12}^2 \quad (25)$$

gleich Null sein. Es wird der Einfachheit halber angenommen, dass es um total unbelasteten Schwingkreise geht ($R_1 = 0$ und $R_2 = 0$) und die Induktivitäten der Spulen sowie die Kapazitäten der Kondensatoren im 25 zueinander gleich sind: $L_1 = L_2 = L$, $C_1 = C_2 = C$ und so wird das LC Kopplungssystem hergeleitet. Unter einer algebraischen Umformung und einem Ansatz $x = \omega^2$ erhält man die quadratische Gleichung

$$x^2(L_{12}^2 C^2 - L^2 C^2) + 2LCx - 1 = 0. \quad (26)$$

Die Lösung von 26 ermöglicht die einfache Lösung für ω_1 und ω_2 [5]

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{(L - L_{12})C}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - k}}, \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{1}{(L + L_{12})C}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + k}}, \end{aligned} \quad (27)$$

wo $k = \frac{L_{12}}{L}$ der Kopplungsgrad und ω_1 und ω_2 die Resonanzfrequenzen der beobachteten LC Kopplung sind.

ω_0 ist die Resonanzfrequenz von einem einzigen ungekoppelten Schwingkreis, die Frequenz bei der ein maximaler möglicher Wert des Stroms beobachtet wird. Im Fall der LC-Kopplung, entspricht ω_0 keinem Maximum, sondern einer Frequenz die sich zwischen zwei Maxima befindet und die Maxima entsprechen den schon bekannten Resonanzfrequenzen ω_1 und ω_2 . [5]

Angenommen dass bei einer Impedanz

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \quad (28)$$

der ungekoppelte Schwingkreis verlustfrei ist ($R = 0$), erhält man nur $\frac{1}{\omega C}$ und ωL Terme. Obwohl es keinen Widerstand gibt, ist es nicht notwendig, dass man einen I_{max} erreicht, weil die Bedingung $|Z| = 0$ erfüllt sein muss; in diesem Fall ist

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}. \quad (29)$$

Stellt man ω auf die linke Seite und den Rest auf die rechte Seite der Gleichung, erhält man den schon bekannten Ausdruck

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (30)$$

In dem geschlossenen Gleichungssystem 24 sieht man Null auf der rechten Seite der beiden Gleichungen. Die Bedeutung von Null ist die Aufhebung der RLC und L_{12} Variablen, was keine Bewegung der Elektronen in Schwingkreisen bedeutet, beziehungsweise, die gesamte interne Energie im geschlossenen Kopplungssystem ist Null. Die gesamte übertragene elektromagnetische Energie von einer Spule zur benachbarten ist Null. D.h. um den physikalischen Vorgang zu beobachten, legt man die äußere Wechselspannung $U = U_0 \cdot e^{i\omega t}$ an den ersten Schwingkreis an. Der hat die Rolle des Emitters. Der Schwingkreis der die Energie akzeptiert, heißt Empfänger. [5]

Wenn man das Gleichungssystem mit $i\omega$ dividiert und die äußere Spannung an den Emitter anlegt, erhält man

$$\begin{aligned} Z_1 I_1 + i\omega L_{12} I_2 &= U, \\ i\omega L_{12} I_1 + Z_2 I_2 &= 0, \end{aligned} \quad (31)$$

wo $Z_i = R_i + i(\omega L_i - \frac{1}{\omega C_i})$ der komplexe Widerstand (Impedanz) ist und

$$\omega L_i - \frac{1}{\omega C_i} = \text{Im}Z = X \quad (32)$$

einem imaginären Teil (Reaktanz, Blindwiderstand) entspricht [5]. In 31 extrahiert man aus der ersten Gleichung den Ausdruck für I_1 , setzt ihn in die zweite Gleichung ein, und bekommt man

$$I_2 = -\frac{i\omega L_{12}}{\omega^2 L_{12}^2 + Z_1 Z_2} U. \quad (33)$$

Im Fall der schon angenommenen Vereinfachungen, gilt für 33 die Vereinfachung $Z_1 = Z_2 = Z$. Berechnet man

$$Z \cdot Z = R^2 + 2RiX - X^2 \quad (34)$$

und multipliziert man den Zähler und Nenner von 33 mit i , erhält man

$$I_2 = \frac{\omega L_{12}}{iR^2 - 2RX - iX^2 + i\omega^2 L_{12}^2} U. \quad (35)$$

In dieser Gleichung sind I_2 und U durch die komplexen Zahlen ausgedrückt, und daher ist die Formel 35 praktisch noch nicht beobachtbar. Deswegen wird der absolute Wert von der ganzen Formel genommen. Der Zähler bleibt sowieso unverändert und positiv. Die Herausforderung ist bei dem Nenner mit imaginären und reellen Werten. Dafür benutzt man das Pythagor'sches Theorem wo der Absolutwert als Hypotenuse unter Verwendung der Katheten als gesamte reelle bzw. imaginäre Werte berechnet wird [5]:

$$|I_2| = \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{[\omega^2 L_{12}^2 + R^2 - X^2]^2 + 4R^2 X^2}} |U| \quad (36)$$

Wie bereits bekannt, LC-Schwingkreise sind verlustfrei ($R = 0$) und man erhält:

$$|I_2| = \frac{\omega L_{12}}{\omega^2 L_{12}^2 - X^2} |U| \quad (37)$$

Multipliziert man den Zähler und Nenner von 37 mit $\frac{\omega^2}{L^2}$, bekommt man die Formel für die theoretische Kurve der gekoppelten LC-Schwingkreise

$$|I_2| = \frac{\omega^3 \frac{k}{L}}{\omega^4(k^2 - 1) + 2\omega^2\omega_0^2 - \omega_0^4} |U|, \quad (38)$$

wobei $k = \frac{L_{12}}{L}$ und $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ die schon bekannten Kopplungsgrad und Resonanzfrequenz angeben [5].

2.4 Ableitung der $|I_2|$ vs ω L-Kurve

Beobachtet man die Resonanzfrequenz Formel der LC-Kopplung 27, sieht man die Abhängigkeit von der Kapazität C . Nun nehmen wir einen Fall an, dass es keinen Kondensator in den Schwingkreisen gibt bzw. es gibt nur eine L Spule in beiden Schwingkreisen. In diesem Fall gibt es keine Kapazität. In 37 fallen alle $\frac{1}{\omega C}$ weg und statt der Formel 38 erhält man die $|I_2|$ vs ω Formel bei gekoppelten L-Schaltungen:

$$|I_2| = \frac{\frac{k}{L}}{\omega(1 - k^2)} |U| \quad (39)$$

Als Ergebnis gibt es keine Maxima auf dem I_2 vs ω Diagramm bzw. die Resonanzfrequenzen sind nicht definiert. Man beobachtet eine reziprok polynomische Kurve.

2.5 Ableitung der $|I_2|$ vs ω RLC-Kurve

Nimmt man an, dass die Schwingkreise belastet sind, darf R nicht vermieden werden und 36 tritt noch einmal in Kraft an. Weil in dieser Arbeit mit dem Kopplungsgrad k immer gearbeitet wird, muss anstatt L_{12} k stehen. Damit vereinfacht man 36 als

$$|I_2| = \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{\omega^4 L_{12}^4 + 2\omega^2 L_{12}^2 (R^2 - X^2) + (R^2 + X^2)^2}} |U|, \quad (40)$$

dividiert man den Nenner und den Zähler von 40 durch L^2 und erhält man

$$|I_2| = \frac{\omega \frac{k}{L}}{\sqrt{\omega^4 k^4 + 2\omega^2 (\frac{k}{L})^2 (R^2 - X^2) + \frac{(R^2 + X^2)^2}{L^4}}} |U|. \quad (41)$$

3 Versuchsdurchführung

3.1 Aufbau der Spulen und die Simulation der Schaltungen im QuickField

Die Experimente wurden in dem Software *QuickField Professional 6.4* simuliert. Dafür muss man eine Apparatur aufbauen, in diesem Fall die zwei Spulen, deren geometrische Eigenschaften ihre Induktivitäten beeinflussen. Informationen von drahtlosen Ladegeräte sowie der Spulen wurden aus Quellen [1] [4] auch übernommen.

Tabelle 1: Die Dimensionen der Spulen

A ... Querschnittsfläche des Drahtes
 N ... die Zahl der Windungen
 R_{in} ... innere Halbmesser
 R_{out} ... äußere Halbmesser
 l ... die Länge der Spule
 R ... Widerstand
 L ... Selbstinduktivität

A / mm^2	1
$N / 1$	10
R_{in} / mm	10
R_{out} / mm	20
l / mm	1
R / Ω	0,016
$L / \mu\text{H}$	3,5

Disk-Spulen sind in Ladegeräte üblich. Eine Eigenschaft einer Disk-Spule ist eine sehr kurze Länge auf der alle Windungen konzentriert sind; Windungen sind eine auf der anderen gestapelt. Der Material des Drahtes ist Kupfer. Es gibt einen inneren, (wo die erste Windung beginnt) und einen äußeren Radius (wo die letzte Windung endet). Einen Umfang der Windung berechnet man unter Verwendung des bekannten Radius. Die gesamte Länge L des benutzten Drahtes ist die Summe aller Umfängen. Der berechnete Widerstand R der Spule beträgt die Summe der Widerstände von allen Windungen; der Widerstand des ganzen Drahtes lautet:

$$R = \frac{\rho}{A}(L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8 + L_9 + L_{10}) \quad (42)$$

wobei ρ elektrische Resistivität ist. Der Selbstinduktivität L wurde mit Hilfe des Inductance Wizard in QuickField berechnet. Die zweite Spule ist identisch gebaut, und hat die gleiche Induktivität und Widerstand. Die Dimensionen der Spule stehen in der Tabelle 1.

Die Darstellung der Spulen ist in einem axialsymmetrischen Zustand. Das ist ein 2D Zustand in dem man nur eine Hälfte des seitlichen Querschnitts der Spulen sehen kann

4, die zweite Hälfte sollte unter der Symmetrieachse stehen, aber von QuickField wird sie nicht dargestellt. Die Symmetrie Achse ist die untere Linie. Zu jeder Komponente des Systems muss man den Namen sowie die Eigenschaften hinzufügen. Der Luft hat eine relative magnetische Permeabilität $\mu = 1$ sowie eine elektrische Leitfähigkeit $\sigma = 0$. Kupfer kann nicht magnetisiert werden bzw. die relative Permeabilität der Spule ist $\mu = 1$. Die elektrische Leitfähigkeit der Spule ist $\sigma = 5.96 \times 10^7$ S/m. Das System hat die Randbedingung in der Form eines Bogens der Luft umfasst. Der magnetische Potential A der Randbedingung ist Null.

Das Magnetfeld zwischen Spulen ist das dichteste, und somit das entscheidendste für die Induktion in der benachbarten Spule. Deshalb muss die Berücksichtigung dieses Feldes so präzise wie möglich sein. Daher muss der Mesh so viele Nodes wie möglich enthalten. Um das zu erfüllen selektiert man die beiden Spulen und teilt man einen Spacing Wert 0.1 mm zu. Der Mesh außerhalb der Spule muss nicht so detailliert sein. Dafür selektiert man die Boundary Punkte auf dem Bogen und teilt manual Spacing 1 mm zu. In Experimenten wird man Abstände zwischen Spulen verändern, und um das zu machen nimmt man das Mesh weg, selektiert man die Spule bewegt man sie Links/rechts und die zweite Spule rechts/links. Man bringt das Mesh zurück. Umso größere der Abstand zwischen den Spulen ist, desto mehrere Nodes enthält das Mesh. Die Zahl der Nodes steht in der Tabelle 2.

Tabelle 2: Der Abstand zwischen zwei Spulen und der entsprechende Mesh im QuickField
d ... Abstand
M ... Mesh

d/mm	$M/nodes$
5	29771
7	32953
8	34117
9	36066
12	43516
15	47670
18	53285
24	62173
30	71149

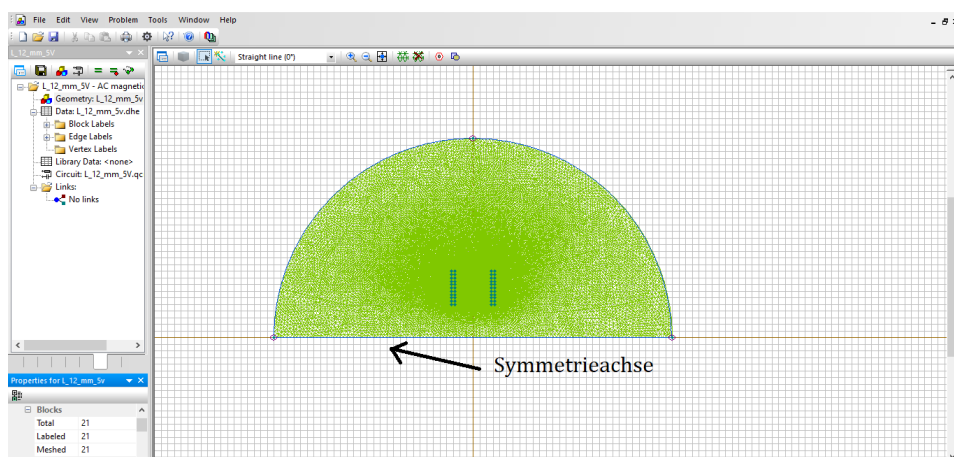


Abbildung 4: Die Darstellung der zwei Spulen in Quickfield mit 43516 mesh Elementen. Der Abstand zwischen Spulen: 12 mm

Die Spulen gehen in ihre entsprechenden Schaltungen. Um die Schaltung zu konstruieren öffnet man einen neuen *ElectricCircuit* File, in dem man eine Spannungsquelle (*InsertVoltageSource*) auswählt und eine Spannungsamplitude 7.07 V zuteilt, was einem effektiven Wert 5 V entspricht. Unter Verwendung der *InsertBlockfromModel* Option verbindet man einen Block (die erste Spule) mit einer Spannungsquelle, diese Schaltung entspricht einem Emitter. Der zweite Block (die zweite Spule) ist die einzige Komponente der zweiten Schaltung. Diese entspricht einem Empfänger. Das Ziel ist, die Schaltungen so wenig wie möglich zu belasten, deswegen sind die Widerstandskomponenten nicht eingefügt. In L Schwingkreisen braucht man keine Kapazitäten, aber in den Abschnitten mit LC Schaltungen benutzt man eine Option *InsertCapacitor* um einen Kondensator einzusetzen. Die Blocks sind noch nicht die Spulen und um das zu machen, wählt man *ProblemProperties* aus und selektiert man die gespeicherte Schaltung. Man klickt auf den Block und öffnet das *ElementProperties* Fenster, selektiert den ersten Block als Spule 1 und den zweiten Block als Spule 2.

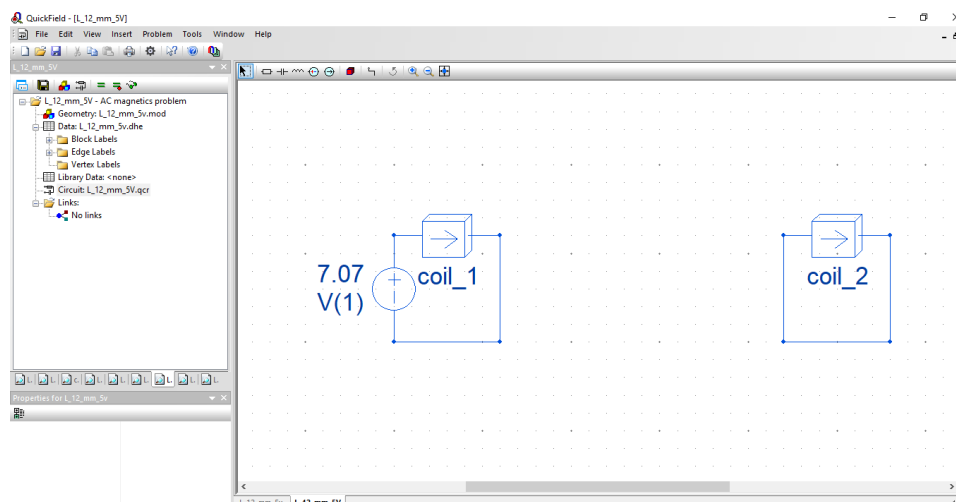


Abbildung 5: Die Darstellung der gekoppelten L-Schaltungen: $U_0 = 7.07\text{V}$ Spannungsquelle und Spule₁ in der ersten Schaltung und Spule₂ in der zweiten Schaltung

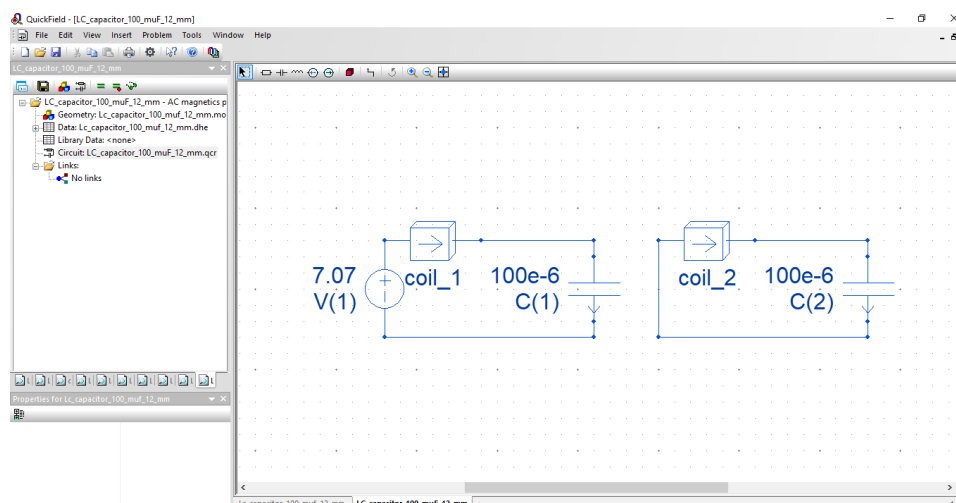


Abbildung 6: Die Darstellung der gekoppelten LC-Schaltungen: $U_0 = 7.07\text{ V}$ Spannungsquelle, Kondensator $C = 100\ \mu\text{F}$ und Spule₁ in der ersten Schaltung und Spule₂ in der zweiten Schaltung

4 Messergebnisse und Diskussion

4.1 Kopplungsgrad k in der Berechnung von gekoppelten L-Schwingkreise

In diesem Experiment geht es um zwei gekoppelten Schwingkreise (Emitter und Empfänger). Jeder Schwingkreis enthält nur eine entsprechende Spule mit dem Induktivität

L analog zum Abschnitt 2.4. Die Spulen wurden durch den Abstand d entfernt. Das Ziel des Experiments ist zu checken, wie der Kopplungsgrad k von einem Abstand d zwischen den Spulen abhängt. Eine Wechselspannung $U = U_0 \cos \omega t$, mit der Amplitude $U_0 = 7.07V$ ($U_{rms} = 5V$) wurde an einen Emitter angelegt. Die Frequenz ω des Generators wurde eingestellt und der effektive Strom I_2 auf dem Empfänger wurde gemessen. Um einen präzisen Kopplungsgrad k zu berechnen, braucht man so viele verschiedene ω zu manipulieren wie möglich. Wenn ein Paket der Messungen genommen wird, wiederholt man das Experiment mit einem verschiedenen Abstand d .

Der Kopplungsgrad k wurde unter einer Verwendung der Methode der kleinsten Quadrate (LSQ-Methode) berechnet und die notwendige Gleichung für I_2 und ω ist die schon bekannte Formel 39. Die Herausforderung: es ist unmöglich 39 zu linearisieren und deswegen darf man die LSQ Methode nicht direkt verwenden. Alternativ kann man Proportionalitätsfaktor C als eine Konstante annehmen:

$$I_{rms} = \frac{C}{\omega}. \quad (43)$$

Um die LSQ-Methode zu benutzen, muss man den reziproken Wert von dem ganzen Ausdruck 43 finden. Reziproken Wert für C nimmt man als ein neues C . Laut der 39 $C = \frac{(1-k^2)}{\frac{k}{L}|U_{rms}|}$, formt man das in eine quadratische Gleichung um:

$$k^2 + \frac{U_{rms} * C}{L} * k - 1 = 0 \quad (44)$$

erhält man zwei Lösungen k_1 und k_2 . Nur eine solche Lösung zählt, die laut der Definition des Kopplungsgrades zwischen 0 und 1 liegt. Eine LSQ-Methode erlaubt eine best fit theoretische Kurve zu zeichnen, wenn der berechnete Parameter (verarbeitete k in diesem Fall) zurück in die Formel eingesetzt wird. Die geplotteten Messungen sowie die best-fit Kurven stehen in unteren Abbildungen. Die berechneten k sowie ihre Fehler bei allen Distanzen stehen in der unteren Tabelle.

Tabelle 3: Kopplungsgrade und die entsprechenden Abstände zwischen zwei Spulen des L-Schwingkreissystems
d ... Abstand
k ... Kopplungsgrad

d/mm	$k/1$
5	0.600+-0.036
7	0.450+-0.024
8	0.410+-0.014
9	0.360+-0.015
12	0.260+-0.008
15	0.2000+-0.0043
18	0.1500+-0.0025
24	0.0900+-0.0008
30	0.05000+-0.00028

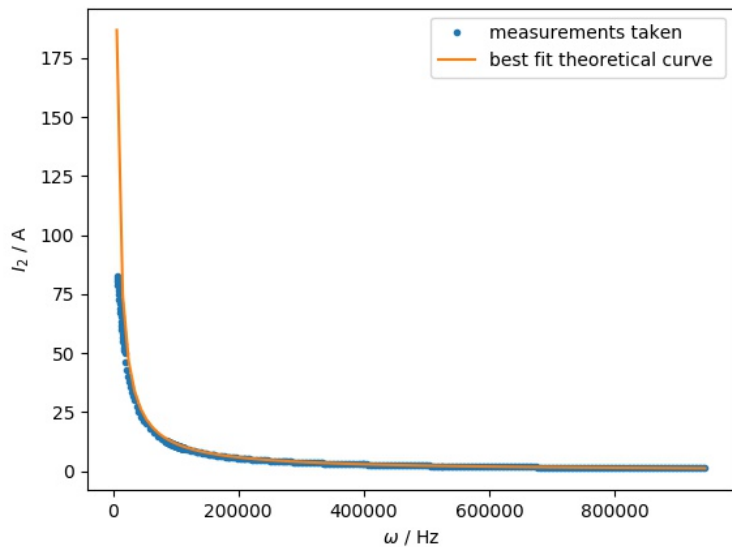


Abbildung 7: Der Strom I_2 des L-Empfängers als eine Funktion der Drehfrequenz ω , wenn zwei Spulen 5 mm voneinander entfernt sind.

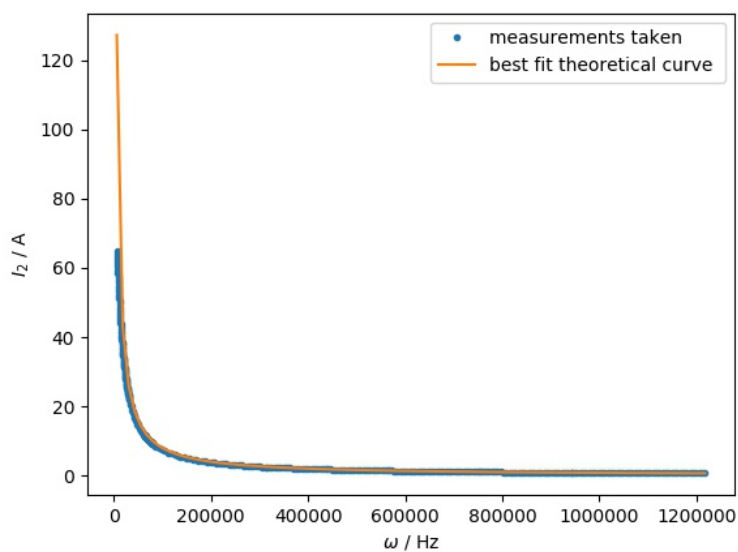


Abbildung 8: Der Strom I_2 des L-Empfängers als eine Funktion der Drehfrequenz ω , wenn zwei Spulen 7 mm voneinander entfernt sind.

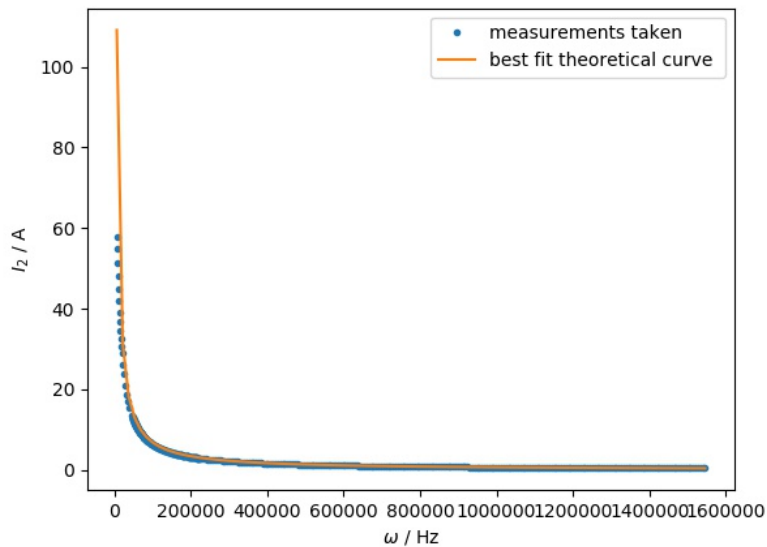


Abbildung 9: Der Strom I_2 des L-Empfängers als eine Funktion der Drehfrequenz ω , wenn zwei Spulen 8 mm voneinander entfernt sind.

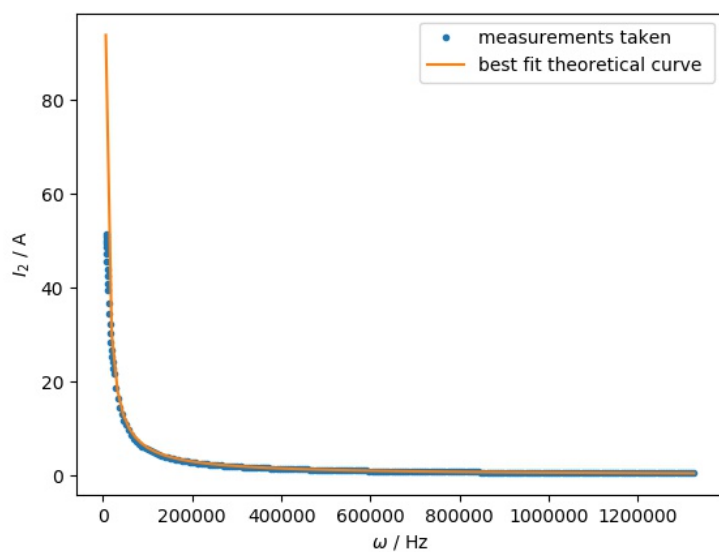


Abbildung 10: Der Strom I_2 des L-Empfängers als eine Funktion der Drehfrequenz ω , wenn zwei Spulen 9 mm voneinander entfernt sind.

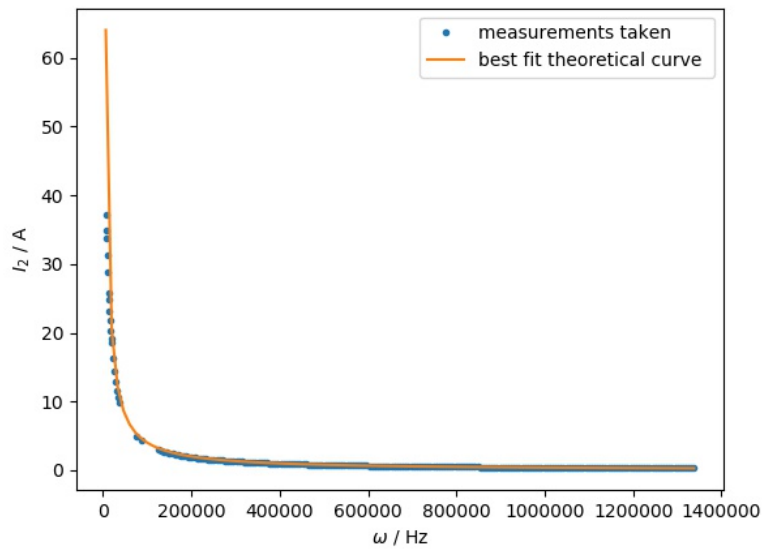


Abbildung 11: Der Strom I_2 des L-Empfängers als eine Funktion der Drehfrequenz ω , wenn zwei Spulen 12 mm voneinander entfernt sind.

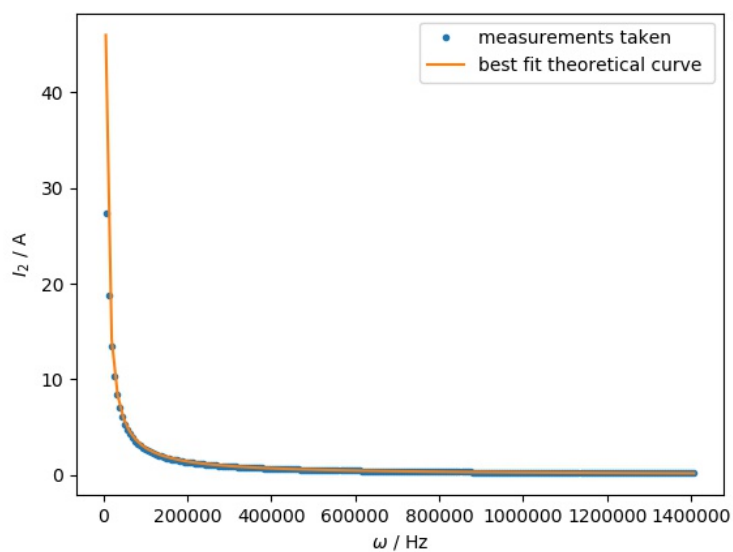


Abbildung 12: Der Strom I_2 des L-Empfängers als eine Funktion der Drehfrequenz ω , wenn zwei Spulen 15 mm voneinander entfernt sind.

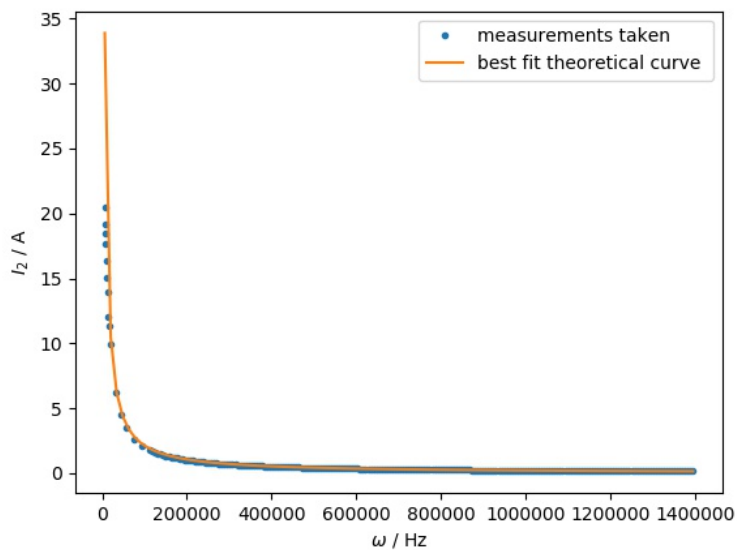


Abbildung 13: Der Strom I_2 des L-Empfängers als eine Funktion der Drehfrequenz ω , wenn zwei Spulen 18 mm voneinander entfernt sind.

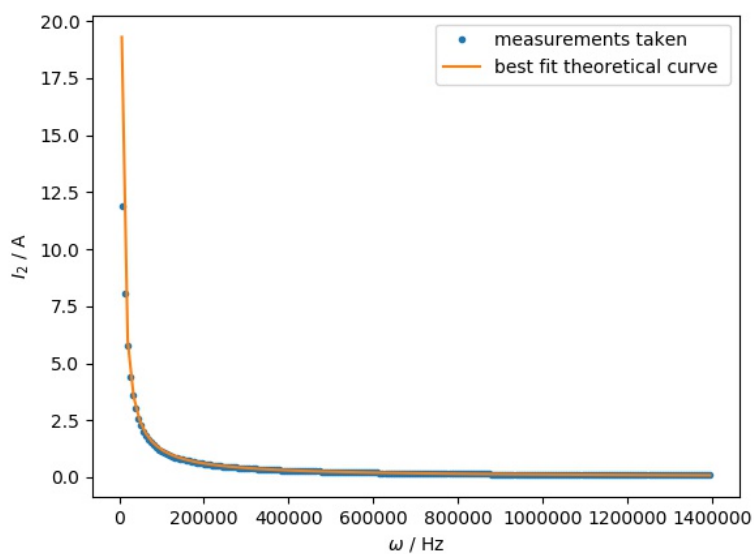


Abbildung 14: Der Strom I_2 des L-Empfängers als eine Funktion der Drehfrequenz ω , wenn zwei Spulen 24 mm voneinander entfernt sind.

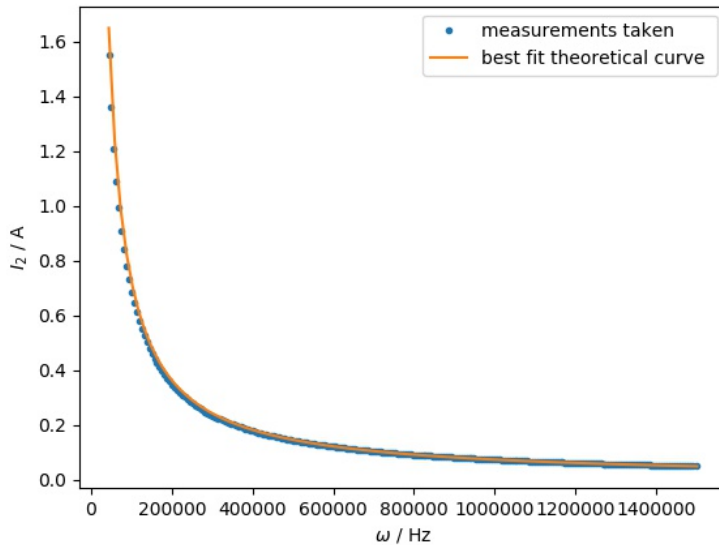


Abbildung 15: Der Strom I_2 des L-Empfängers als eine Funktion der Drehfrequenz ω , wenn zwei Spulen 30 mm voneinander entfernt sind.

Auf den Diagrammen 7, 8,9,10,11, 12,13, 14,15 kann man bemerken dass die theoretische Kurve der Formel 39 ziemlich gut zu den Messungen passt. Trotzdem verläuft die Kurve für niedrigere Drehfrequenzen nicht ganz durch die Messungen. Die Erklärung liegt in einem Wirkwiderstand R in den Spulen der nicht berücksichtigt wird. Kleinere Frequenzen verursachen einen kleineren Blindwiderstand X , als Konsequenz dominiert ein Wirkwiderstand R . Weil 39 den R nicht berücksichtigt, beobachtet man eine unpräzise statistische Auswertung für kleine Drehfrequenzen.

Der Wirkwiderstand R erniedrigt den Betrag des Stroms auch. Die theoretische Kurve liegt im Intervall der ersten und letzten experimentellen Frequenz, aber die erste I_2 Messung ist niedriger als der erste theoretische Wert, was sich durch nicht berücksichtigter Belastung des Kopplungssystems erklären lässt.

Man kann auch bemerken dass mit einem größeren Abstand die I_2 Werte kleiner werden. Zum Beispiel, bei einem 5 mm Abstand für eine 6283 Hz Drehfrequenz ω der induzierte I_2 Strom 82,8 A beträgt, und bei einem 30 mm Abstand weniger als 2 A.

Wie in der Tabelle 3 bemerkt wird, fällt mit einem Abstand d der Kopplungsgrad k ab. Die Beziehung zwischen k und d lässt sich durch die schon bekannte Neumann'sche Formel 17 konstruieren. Weil es um Disk Spulen geht, ist es schwierig zu entscheiden ob man einen inneren oder äußeren Halbmesser annehmen muss. Die ähnlichsten theoretische zu experimentellen Werte sind dann erhalten wenn der mittlere Wert des inneren und äußeren Halbmessers genommen wurde. In diesem Fall betragen die Halbmesser der Emitter- und Empfängerspulen $a = b = 15$ mm. Statistisch verarbeiteten Werte k sowie

die mit Hilfe der Neumann'schen Formel theoretisch berechnete k wurden in Abb. 16 dargestellt.

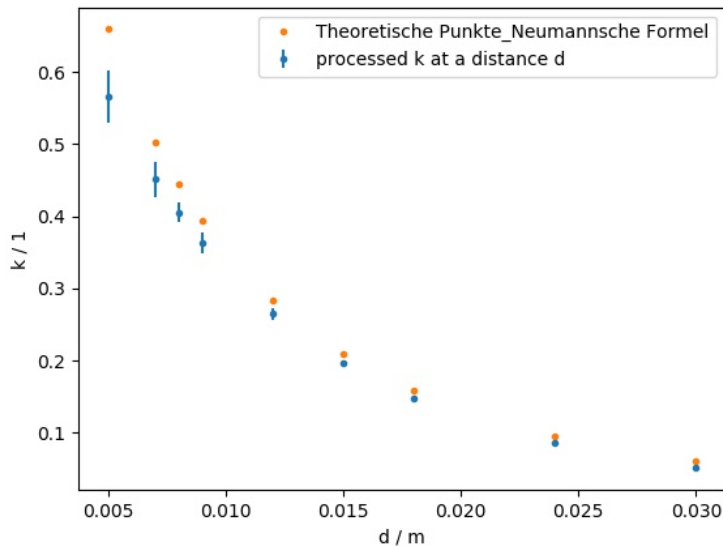


Abbildung 16: Der Kopplungsgrad k des L-Kopplungssystems als eine Funktion des Abstandes d zwischen benachbarten Spulen

4.2 Der Einfluss der Kapazitäten auf die Übertragung der Energie

Das Ziel dieses Experiments war herauszufinden, wie die Größe des Stroms I_2 im Empfänger sich verändert, wenn verschiedene Kapazitäten C im gekoppelten LC-System eingestellt werden. Im Vergleich zum L-Kopplungssystem, wurden zwei Kondensatoren C_1 und C_2 eingestellt und $C_1 = C_2 = C$. Weil der Einfluss des Abstandes in diesem Experiment nicht testiert wurde, wurde er durch das ganze Experiment fixiert. Der gewählte Abstand ist $d = 12mm$. Wenn der Abstand zwischen zwei Spulen zu groß ist, sind zwei Maxima auf dem Diagramm zu nah zueinander und deswegen kann man den Unterschied nicht bemerken und in einigen Fällen wurde nur ein gemeinsames Maximum beobachtet. Das Beispiel ist das untere Diagramm.

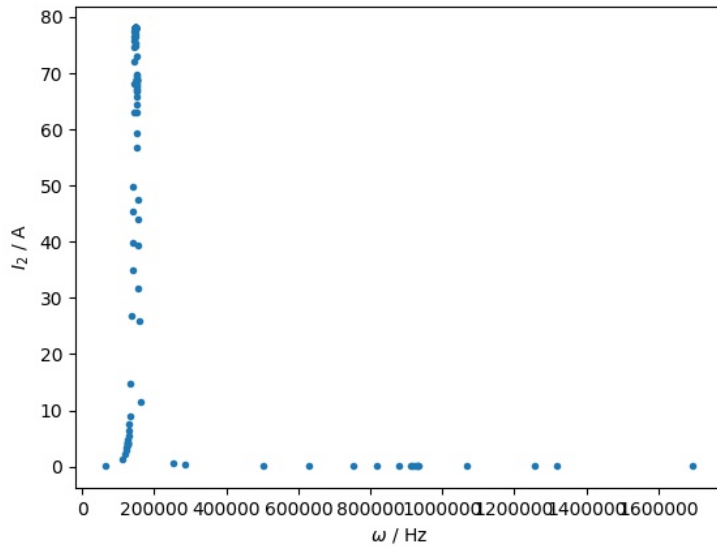


Abbildung 17: Der Strom I_2 des LC-Empfängers mit einer Kapazität $C = 12.56\mu\text{F}$ als eine Funktion der Drehfrequenz ω , wenn zwei Spulen 30 mm voneinander entfernt sind.

Neun verschiedene Kapazitäten C wurden ausprobiert. Ein Paket der Messungen I_2 vs ω wurde für jedes C simuliert, und in den unteren Diagrammen dargestellt. Dazu wurde eine theoretische LC-Kurve unter einer Verwendung der Formel 38 dargestellt und dazu wurde die theoretische RLC-Kurve unter Verwendung der Formel 41 gezeichnet. 41 berücksichtigt den Widerstand R , und stellt deshalb realistischere Ergebnisse dar. Das kann man in den unteren Diagrammen bemerken, wo die LC-Kurve fast unendlich ist. Weil der gewählte Abstand bei allen C fixiert ist, ist der gewählte Kopplungsgrad für alle Schaltungen immer gleich: der berechnete Kopplungsgrad ($k = 0.26$) aus dem Abschnitt . Man muss berücksichtigen, dass die RLC-Kurve durch die Messungen nicht ganz verläuft. Die Maxima sind noch immer größer. Entweder wurde falsche k gewählt, R wurde falsch berechnet, oder eine andere Variable wurde nicht berücksichtigt. Wahrscheinlich wurde R falsch berechnet, weil die Position der experimentellen und theoretischen Maxima fast richtig, aber die Höhe verschieden. Die Höhe wird in diesem Fall durch die Dämpfung bestimmt.

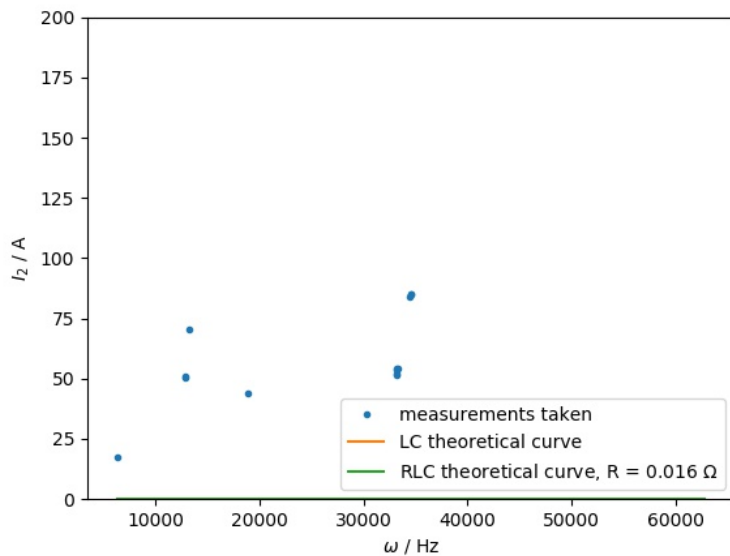


Abbildung 18: Der Strom I_2 des LC-Empfängers mit einem Kapazität $C = 1 \text{ nF}$ als eine Funktion der Kreisfrequenz ω , wenn zwei Spulen 12 mm voneinander entfernt sind, $k = 0,26$

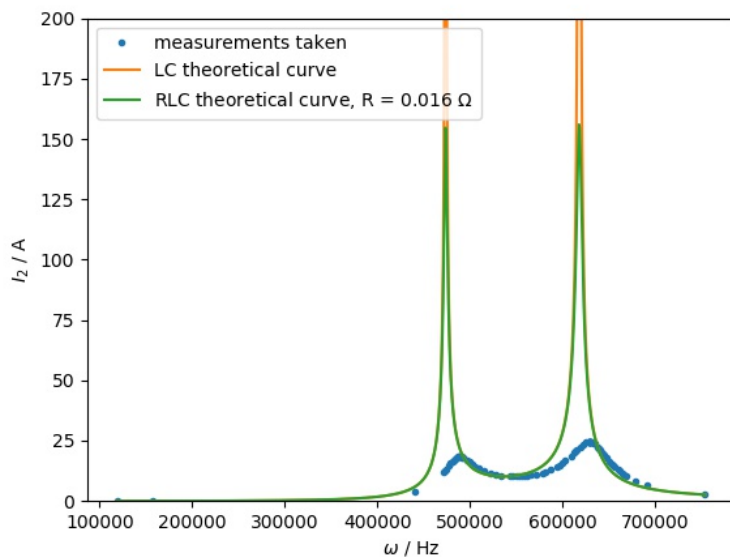


Abbildung 19: Der Strom I_2 des LC-Empfängers mit einem Kapazität $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$ als eine Funktion der Kreisfrequenz ω , wenn zwei Spulen 12 mm voneinander entfernt sind, $k = 0,26$

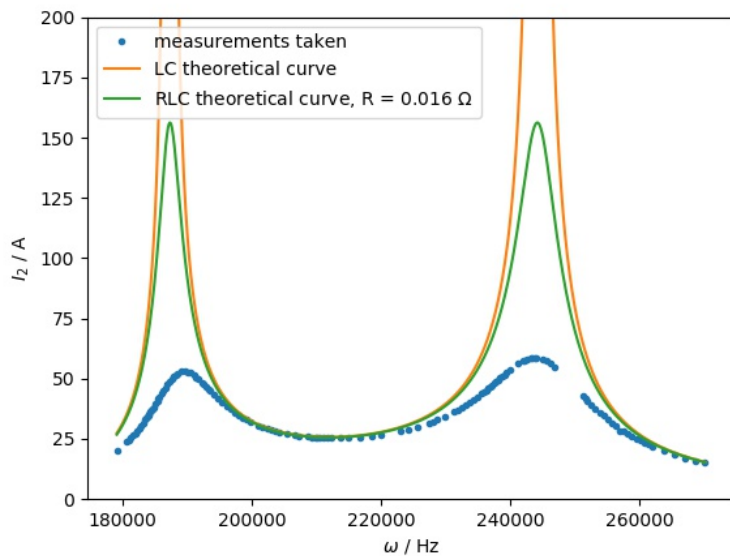


Abbildung 20: Der Strom I_2 des LC-Empfängers mit einem Kapazität $C = 6.40 \mu\text{F}$ als eine Funktion der Kreisfrequenz ω , wenn zwei Spulen 12 mm voneinander entfernt sind, $k = 0,26$

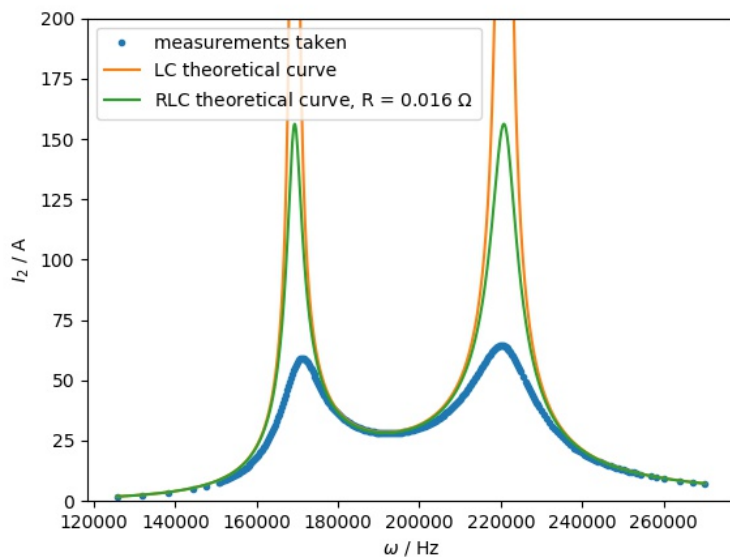


Abbildung 21: Der Strom I_2 des LC-Empfängers mit einem Kapazität $C = 7.83 \mu\text{F}$ als eine Funktion der Kreisfrequenz ω , wenn zwei Spulen 12 mm voneinander entfernt sind, $k=0,26$

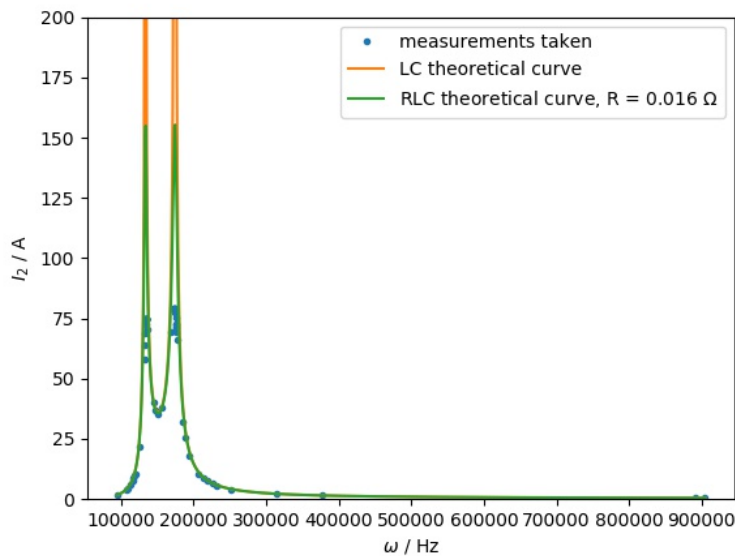


Abbildung 22: Der Strom I_2 des LC-Empfängers mit einem Kapazität $C = 12.56 \mu\text{F}$ als eine Funktion der Kreisfrequenz ω , wenn zwei Spulen 12 mm voneinander entfernt sind, $k=0,26$

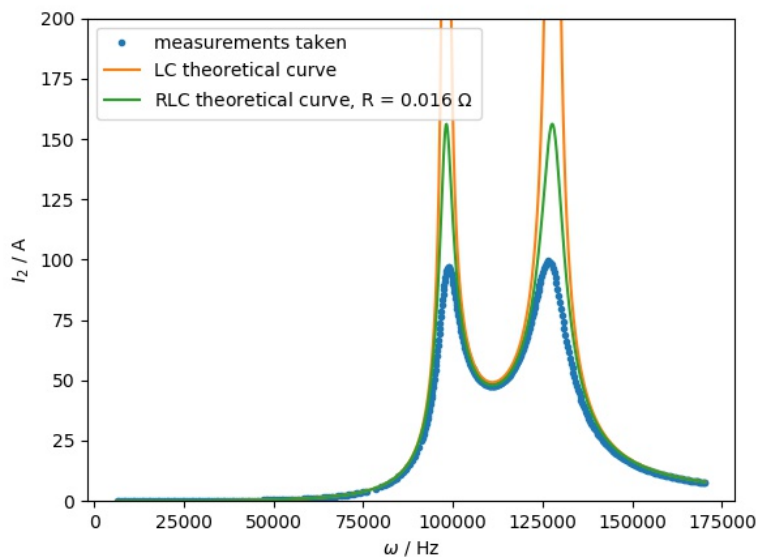


Abbildung 23: Der Strom I_2 des LC-Empfängers mit einem Kapazität $C = 23.36 \mu\text{F}$ als eine Funktion der Kreisfrequenz ω , wenn zwei Spulen 12 mm voneinander entfernt sind, $k=0,26$

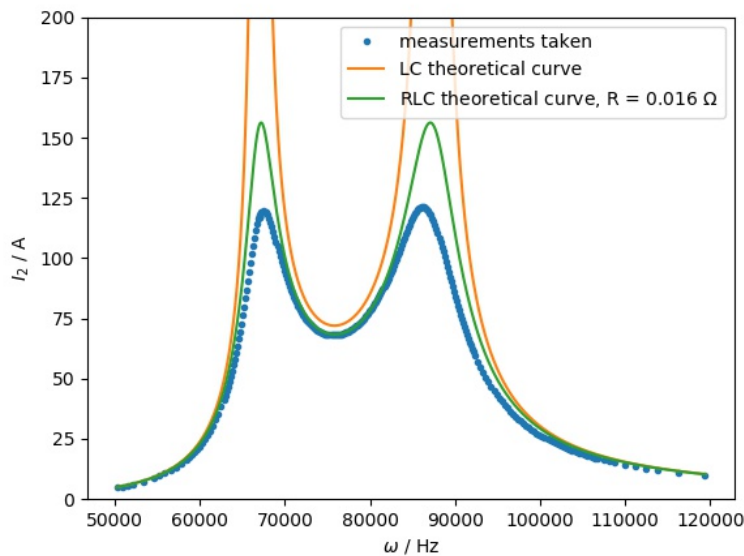


Abbildung 24: Der Strom I_2 des LC-Empfängers mit einem Kapazität $C = 50 \mu\text{F}$ als eine Funktion der Kreisfrequenz ω , wenn zwei Spulen 12 mm voneinander entfernt sind, $k = 0,26$

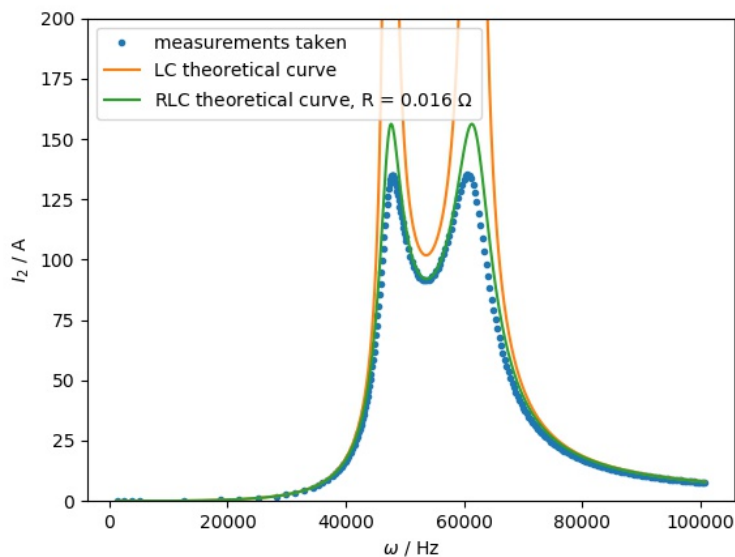


Abbildung 25: Der Strom I_2 des LC-Empfängers mit einem Kapazität $C = 100 \mu\text{F}$ als eine Funktion der Kreisfrequenz ω , wenn zwei Spulen 12 mm voneinander entfernt sind, $k = 0,26$.

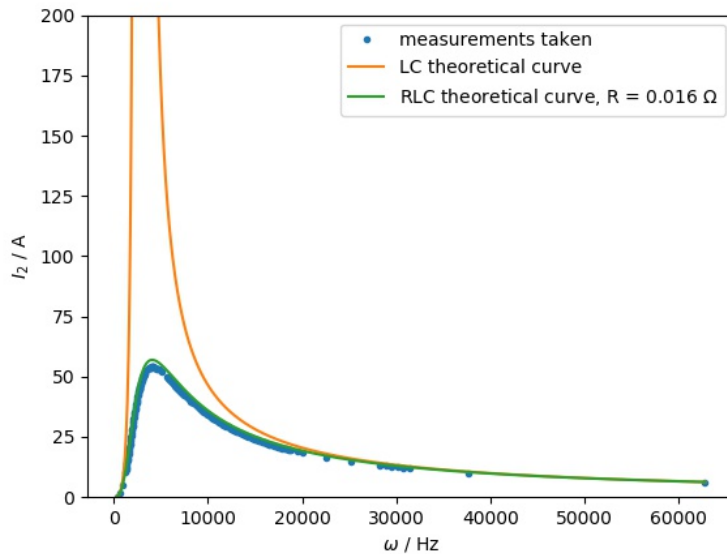


Abbildung 26: Der Strom I_2 des LC-Empfängers mit einem Kapazität $C = 3.84$ cF als eine Funktion der Kreisfrequenz ω , wenn zwei Spulen 12 mm voneinander entfernt sind, $k = 0,26$.

Auf den Diagrammen 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25 kann man sehen, dass der maximale Strom I_2 mit dem wachsenden Kapazität sich erhöht, obwohl der Kopplungsgrad k wegen des konstanten Abstandes sich nicht verändert. Der Grund ist die Veränderung in einem Blindwiderstand 32 . Umso größer der Kapazität ist, desto kleiner ist der $\frac{1}{\omega C}$ Term, und das Ergebnis ist der niedriger Blindwiderstand, angenommen dass ωL in allen Fällen kleiner als der $\frac{1}{\omega C}$ Term ist. Die ganze Tatsache liegt in einer Verringerung des Unterschiedes zwischen ωL und $\frac{1}{\omega C}$ Terme, je kleiner der Unterschied ist, desto kleiner ist die Reaktanz (Blindwiderstandsbeitrag), und desto kleiner ist die Impedanz. Es kann auch passieren dass ωL groß ist. In diesem Fall braucht man eine so kleine Kapazität wie möglich, um die Terme auszugleichen.

Laut Demtröder (s. 174, Abbildung 6.9), müssen die beiden Maxima bei einem LC-Kopplungssystem den gleichen Wert haben. In obigen Diagrammen beobachtet man den Unterschied zwischen Maxima. Die Werte sowie die Bruchzahl der Maxima ausgedrückt in Prozent stehen in der Tabelle 4.

Tabelle 4: Die zwei maximalen Werte des Empfängerstroms I_2 , entsprechende abgelesene von dem Messungspaket Resonanzfrequenzen, davon berechnete Kopplungsgrade, sowie die Ähnlichkeit in ihren Maxima.

C ... Kapazität des eingestellten Kondensators
 ω_1 ... die erste Resonanzfrequenz
 ω_0 ... berechnete Resonanzfrequenz des Schwingkreises
 ω_2 ... die zweite Resonanzfrequenz
 k_1 ...Kopplungsgrad von ω_1 berechnet
 k_2 ...Kopplungsgrad von ω_2 berechnet
 I_{max1} ... das erste I_2 Maximum
 I_{max2} ... das zweite I_2 Maximum

$C/\mu\text{F}$	ω_1/Hz	ω_0/Hz	ω_2/Hz	k_1	k_2	I_{max1}/A	I_{max2}/A	Zwei Maxima Ähnlichkeit /%
1	488518	531674	628994	0,18	0,29	18,42	24,60	74,90
6,40	189752	210163	243788	0,23	0,26	53,00	59,70	90,22
7,83	171217	190005	220226	0,23	0,26	59,20	64,49	91,80
12,56	134818	150021	173416	0,24	0,25	75,00	79,00	94,70
23,36	98803	110004	126606	0,24	0,25	96,80	99,60	97,00
50,00	67544	75190	86237	0,24	0,24	120,00	121,30	98,90
100,00	47906	53167	60632	0,23	0,23	134,70	135,33	99,60

Die Erklärung liegt in der Belastung der gekoppelten Schwingkreise. Eine Spiegelung der zwei Maxima gilt nur dann, wenn die LC-Schwingkreise total unbelastet sind. Weil die Spulen einigen Widerstand enthalten, gibt es eine Belastung, und daher ist die Lösung die Reaktanz zu erniedrigen um die Maxima auszugleichen. Wie schon in 4 gesehen wird, sind maximale Werte mit wachsendem Kapazität ähnlicher. Bei einem Kapazität $C = 100 \mu\text{F}$, kriegt man eine Spiegelung. Deswegen wird dieser Kapazität im nächsten Experiment benutzt.

Die Formel für 27 zeigt, dass beide Resonanzfrequenzen unter Verwendung von k berechnet werden können. Im umgekehrten Fall, sollte k immer gleich sein, egal ob man ω_1 oder ω_2 verwendet. In der Tabelle 4 sieht man die von den experimentellen Resonanzfrequenzen berechneten k , die zueinander nicht gleich sind. Man kann auch bemerken dass bei verschiedenen Kapazitäten C die Kopplungsgrade auch unterschiedlich sind. Das widerspricht der Theorie, weil der Kapazität den Kopplungsgrad nicht beeinflussen soll. Weil es den Kopplungsgraden aus 4 nicht getraut wird, ist es besser einen berechneten Kopplungsgrad aus dem vorherigen Abschnitt zu benutzen.

In den Abbildungen 18, 19,20,21,22, 23,24, 25 bemerkt man eine Verschiebung der Maxima nach links mit einem erhöhenden Kapazität. Es ist nicht überraschend, weil laut 30 die Resonanzfrequenz ω_0 kleiner wird, wenn Kapazität größer ist.

4.3 LC gekoppelte Schwingkreise bei verschiedenen Abständen

Das Experiment aus dem Abschnitt 4.2 wurde wiederholt. D.h. Ein Paket der I_2 vs ω Messungen wurde für derselbe Distanzen wiederholt. Diesmal ist ein Kondensator mit einem Kapazität $C = 100\mu\text{F}$ (siehe Abschnitt 4.2) in beiden Emitter sowie Empfänger bei jedem Abstand fixiert. Das Ziel war herauszufinden wie sich Kopplungsgrad verändert wenn der Abstand zwischen Spulen bei LC-Schwingkreise sich verändert.

Aus den entnommenen Paketen der Messungen wurden die Resonanzfrequenzen ω_1 und ω_2 (Frequenzen der Maxima) abgelesen und unter ihrer Verwendung wurde der entsprechende Kopplungsgrad k berechnet. In der unteren Tabelle sind k_1 und k_2 zueinander gleich, was dem theoretischen Teil 27 entspricht, k muss immer gleich sein, egal welche Resonanzfrequenz benutzt wurde. Von der anderen Seite sind k in der unteren Tabelle im Vergleich zu k in Tabelle 3 unterschiedlich. Der Unterschied bei $d = 5$ mm ist 0.06 und bei anderen Abstände ist der Unterschied 0.03 oder 0.04 (circa 10-12 %). Der Unterschied ist groß und unerwartet, weil ein Kapazität den Kopplungsgrad nicht beeinflusst.

Tabelle 5: Die von dem LC-Messungspaket abgelesenen Resonanzfrequenzen sowie von ihnen berechneten Kopplungsgräde k wenn der Abstand zwischen Spulen manipuliert wurde und Kapazität $C = 100 \mu\text{F}$ fixiert ist.

d ... Abstand ω_1 ... die erste Resonanzfrequenz

ω_2 ... die zweite Resonanzfrequenz

k_1 ...Kopplungsgrad von ω_1 berechnet

k_2 ...Kopplungsgrad von ω_2 berechnet

I_{max1} ... der erste I_2 Maximum

I_{max2} ... der zweite I_2 Maximum

d/mm	ω_1/Hz	ω_2/Hz	k_1	k_2	I_{max1}/A	I_{max2}/A
5	42883	78069	0,54	0,54	130	127
7	44611	69900	0,42	0,42	132	132
8	45396	67152	0,37	0,37	133	133
9	46024	65031	0,34	0,33	133	134
12	47906	60633	0,23	0,23	135	135
15	49323	57962	0,16	0,16	135	136
18	50737	56077	0,1	0,1	136	136
24	53194	/	$9,45 \times 10^{-4}$	/	134	/
30	53250	/	$3,07 \times 10^{-3}$	/	109	/

Obwohl der Kopplungsgrad k mit einem größeren Abstand abfällt, wie man in Tabelle 5 sieht, erhöhen sich die maximalen Werte des I_2 Stroms bis einem 24 mm Abstand. Dann fällt der Strom ab. Das macht keinen Sinn: im Vergleich zum Abschnitt 4.2 verringern sich die Werte des Stroms mit jedem größeren Abstand. Die Werte I_2 sowie die entsprechenden Drehfrequenzen ω stehen in unteren Abbildungen.

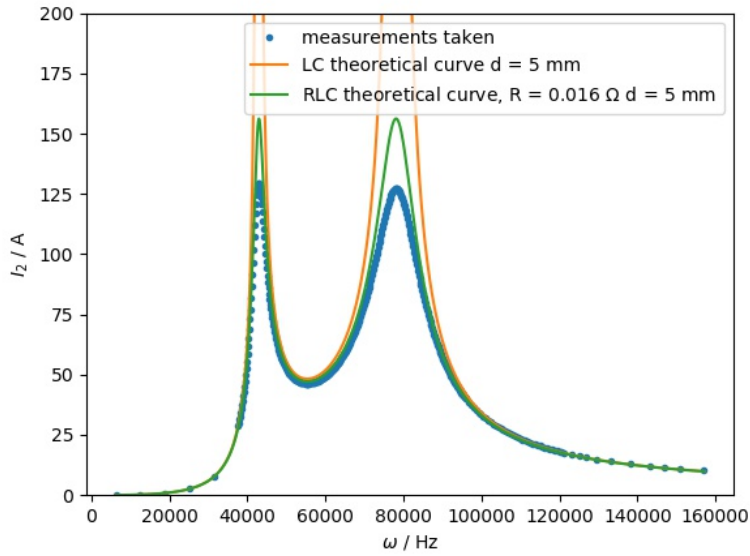


Abbildung 27: Der Strom I_2 des LC-Empfängers mit einem Kapazität $C = 100 \mu\text{F}$ als eine Funktion der Drehfrequenz ω , wenn zwei Spulen 5 mm voneinander entfernt sind, $k = 0,54$

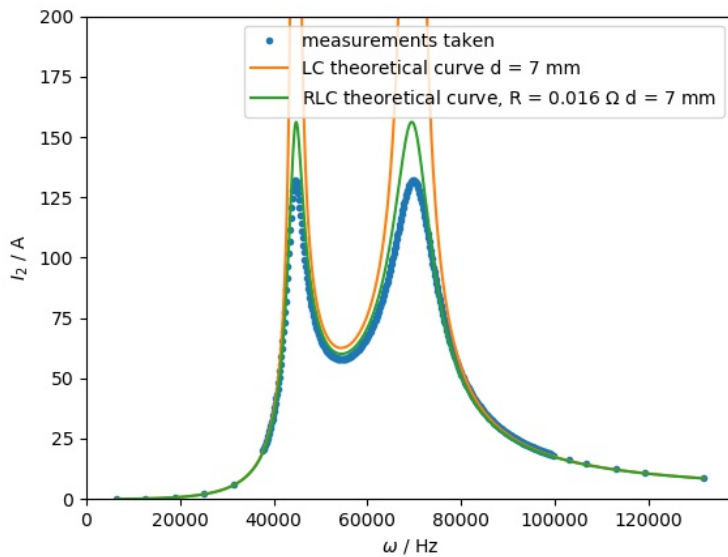


Abbildung 28: Der Strom I_2 des LC-Empfängers mit einem Kapazität $C = 100 \mu\text{F}$ als eine Funktion der Drehfrequenz ω , wenn zwei Spulen 7 mm voneinander entfernt sind, $k = 0,42$

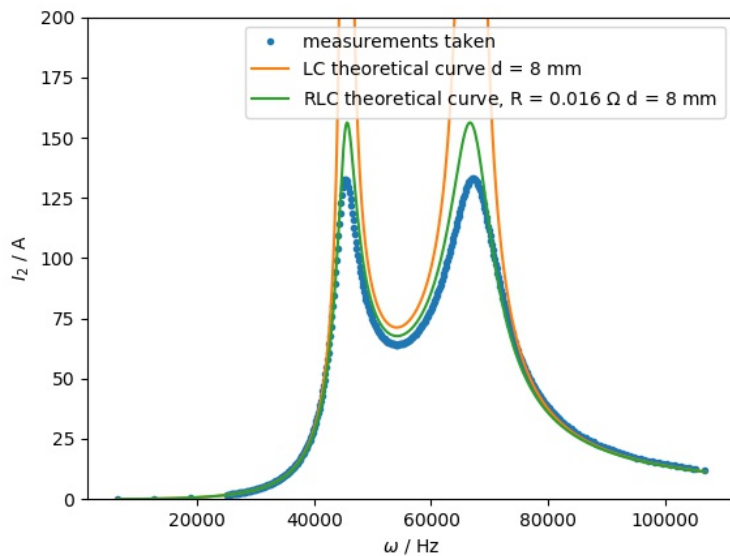


Abbildung 29: Der Strom I_2 des LC-Empfängers mit einem Kapazität $C = 100 \mu\text{F}$ als eine Funktion der Drehfrequenz ω , wenn zwei Spulen 8 mm voneinander entfernt sind, $k = 0,37$

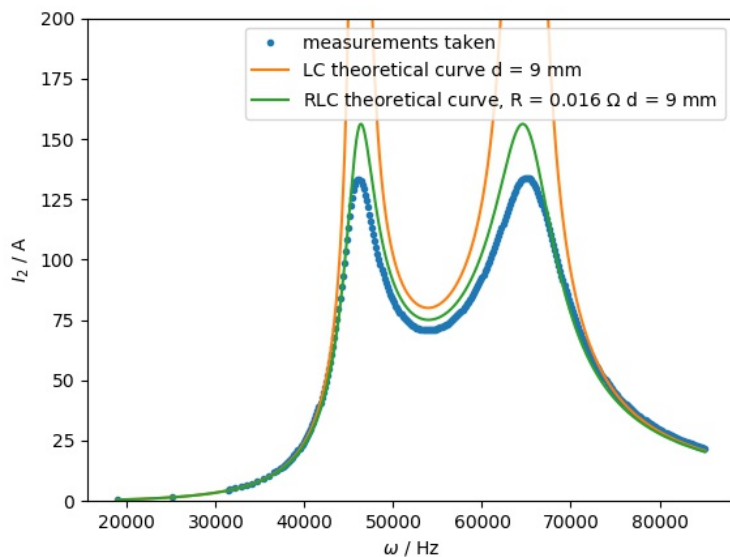


Abbildung 30: Der Strom I_2 des LC-Empfängers mit einem Kapazität $C = 100 \mu\text{F}$ als eine Funktion der Drehfrequenz ω , wenn zwei Spulen 9 mm voneinander entfernt sind, $k = 0,34$

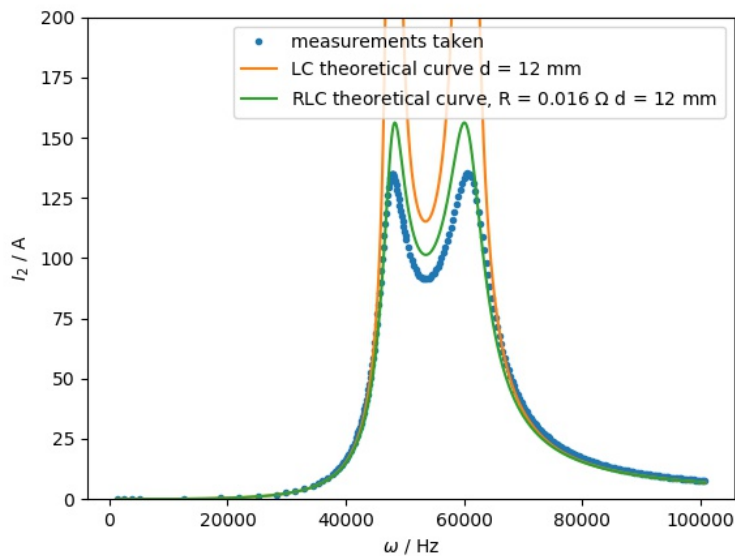


Abbildung 31: Der Strom I_2 des LC-Empfängers mit einem Kapazität $C = 100 \mu\text{F}$ als eine Funktion der Drehfrequenz ω , wenn zwei Spulen 12 mm voneinander entfernt sind, $k = 0,23$

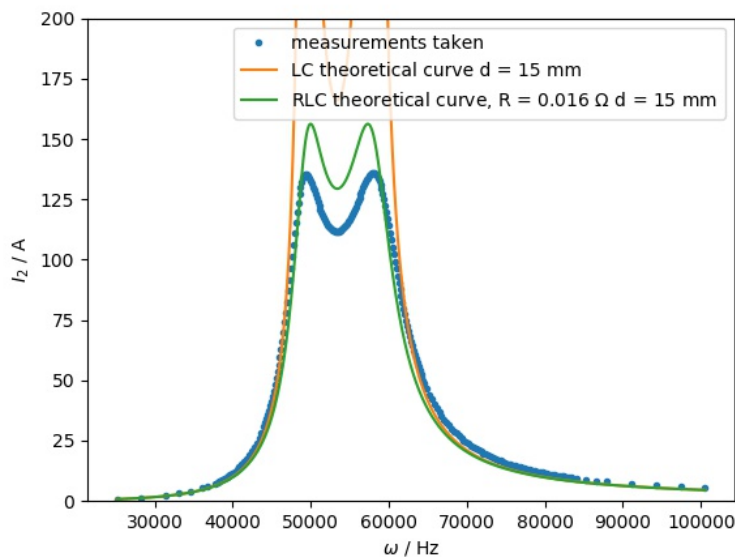


Abbildung 32: Der Strom I_2 des LC-Empfängers mit einem Kapazität $C = 100 \mu\text{F}$ als eine Funktion der Drehfrequenz ω , wenn zwei Spulen 15 mm voneinander entfernt sind, $k = 0,16$

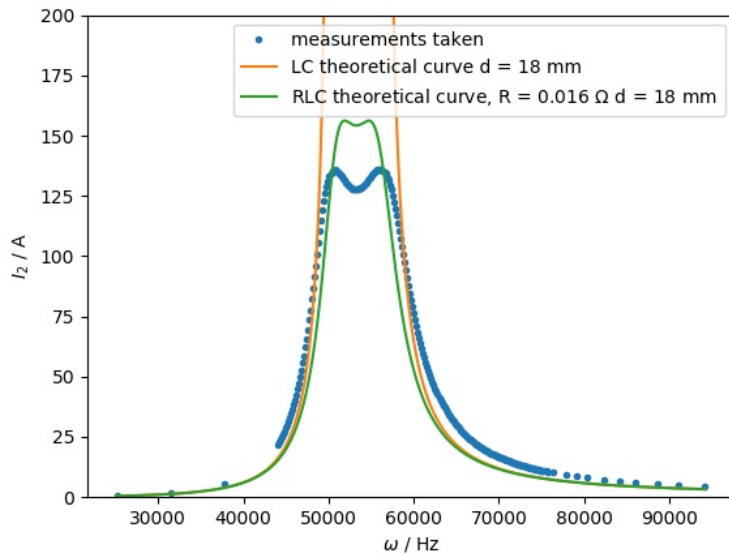


Abbildung 33: Der Strom I_2 des LC-Empfängers mit einem Kapazität $C = 100 \mu\text{F}$ als eine Funktion der Drehfrequenz ω , wenn zwei Spulen 18 mm voneinander entfernt sind, $k = 0,10$

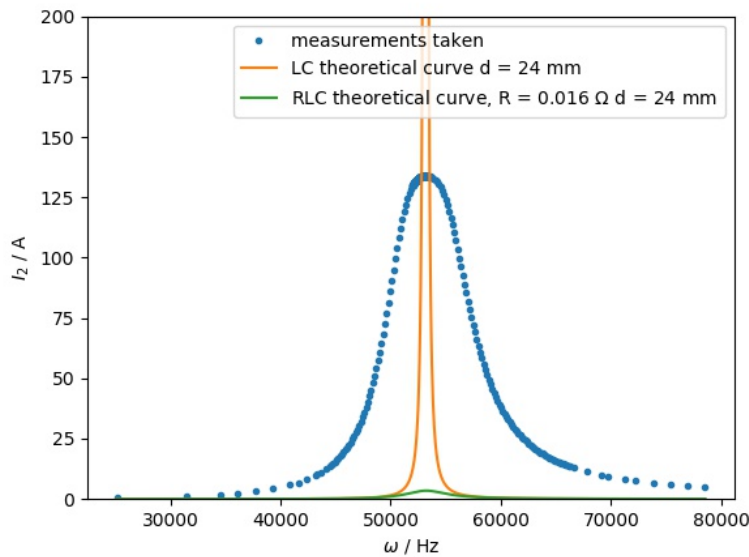


Abbildung 34: Der Strom I_2 des LC-Empfängers mit einem Kapazität $C = 100 \mu\text{F}$ als eine Funktion der Drehfrequenz ω , wenn zwei Spulen 24 mm voneinander entfernt sind, $k = 9,45 \times 10^{-4}$

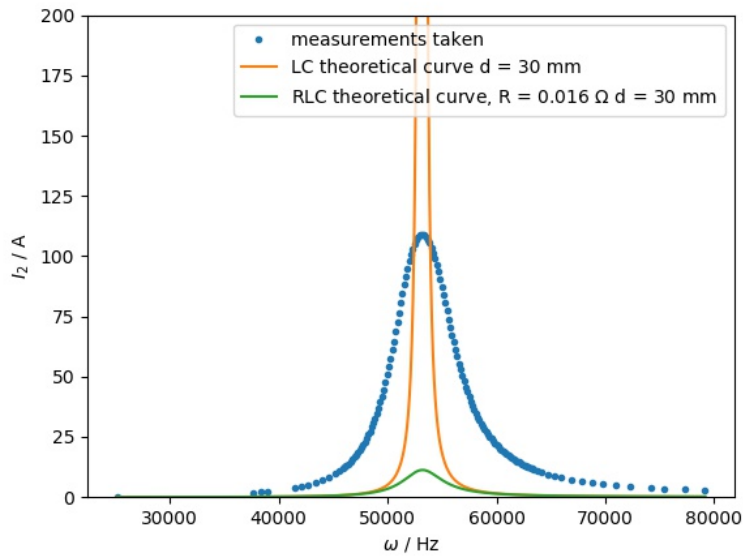


Abbildung 35: Der Strom I_2 des LC-Empfängers mit einer Kapazität $C = 100 \mu\text{F}$ als eine Funktion der Drehfrequenz ω , wenn zwei Spulen 30 mm voneinander entfernt sind, $k = 3.07 \times 10^{-3}$

5 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die drahtlose Energieübertragung zwischen Spulen anhand von analytischen Formeln und numerischen Berechnungen in der Software QuickField untersucht. Eine große Distanz erniedrigt einen induzierten Strom der durch die Empfängerspule fließt. Wie im Abschnitt 4.2 ersichtlich, wo Spulen mit zehn Windungen und einem Halbmesser 15 mm bei einem 30 mm Abstand untersucht werden, ist der übertragene Strom mehr als 98 % kleiner als der Wert bei einem 5 mm Abstand. Das gleiche passiert mit einem Kopplungsgrad der von 0,6 bis 0,05 reduziert wird, was mit der Neumann'schen Formel bestätigt wird. Die Erklärung liegt darin, dass bei großem Abstand das Magnetfeld nicht so dicht wie bei kleinerem Raum ist. Im nächsten Versuch, könnte man die Permeabilität μ erhöhen, um das Magnetfeld dichter zu machen, aber es bleibt noch immer eine unbeantwortete Frage, ob Kopplungsgrad k sich erhöhen wird.

Obwohl man einen Abstand konstant hält kann man den Strom vergrößern. Im Abschnitt 4.2 sieht man die größeren Maxima bei erhöhenden Kapazitäten $C = C_1 = C_2$. Man kann in der Tabelle 4 auch sehen dass der Kopplungsgrad k mit verschiedener Kapazität unterschiedlich ist, was der Theorie widerspricht. Ursache dafür können nicht berücksichtigte Effekte wie der Innenwiderstand der Spule, oder numerische Ungenauigkeiten sein. Es ist keine gute Idee einen Kopplungsgrad k in diesem Abschnitt zu berechnen, weil Kopplungsgrade k bei einem Messungspaket für jede Resonanzfrequenz zueinander unterschiedlich sind. Das bedeutet dass ein Ungleichgewicht zwischen Blindwiderstands-

und Wirkwiderstandskomponenten beobachtet wird.

Obwohl der Kopplungsgrad sich bei größeren Abständen im Fall der LC-Schwingkreise verringert, kann der Maximum des Stroms in Empfängerspule größer werden, was mit einem Kondensator aus dem Abschnitt 4.3 gezeigt wurde.

Literatur

- [1] Coils Used for Wireless Charging. *Freescale Semiconductor*, (AN4866), January 2014.
- [2] Elliptic integral, December 2020. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_integral.
- [3] Sergey Chishko. Wireless charging. URL: https://quickfield.com/advanced/wireless_charger.htm.
- [4] Dean Clark. Considerations When Designing a Wireless Charging System. URL: <https://abracon.com/uploads/resources/Abracon-White-Paper-Considerations-When-Designing-a-Wireless-Charging-System.pdf>.
- [5] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 2 Elektrizität und Optik*. SpringerSpektrum, sechste edition, 2013.
- [6] Rafael Mendes Duarte and Gordana Klaric Felic. Analysis of the Coupling Coefficient in Inductive Energy Transfer Systems. *Active and Passive Electronic Components*, 2014(951624), January 2014. URL: <https://www.hindawi.com/journals/apec/2014/951624/>.
- [7] David J. Griffiths. *INTRODUCTION TO ELECTRODYNAMICS*. PEARSON, fourth edition, 2013.
- [8] Matteo Mariantoni. Maxwell Inductance Neumann. YouTube, September 2020. URL: https://www.youtube.com/watch?v=F_PmMqSyqCM&list=FLbFmS2A01oeVUghaGJ7bFUg&index=3.
- [9] Chiaki Nagai, Kenji Inukai, Masato Kobayashi, Tatsuya Tanaka, Kensho Abumi, Takehiro Imura, and Yoichi Hori. Scaling Law of Coupling Coefficient and Coil Size in Wireless Power Transfer Design via Magnetic Coupling. *ELECTRICAL ENGINEERING in JAPAN*, November 2017.